Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2016 Métropole

23 juin 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Probabilités — 6 points

Une société commercialise des composants électroniques qu'elle fabrique dans deux usines. Lors d'un contrôle de qualité, 500 composants sont prélevés dans chaque usine et sont examinés pour déterminer s'ils sont « bons » ou « défectueux ». Résultats obtenus pour l'ensemble des 1000 composants prélevés :

	Usine A	Usine B	TOTAL
Bons	473	462	935
Défectueux	27	38	65
TOTAL	500	500	1000

1. Si on prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine A, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?
On suppose dans tout l'exercice être dans des conditions d'équiprobabilités.
Il y a 27 composants défectueux parmi les 500 de l'usine A donc si on prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine A, la probabilité qu'il soit défectueux est :

$$\boxed{p_1 = \frac{27}{500} = 0,054}$$

2. Si on prélève un composant au hasard parmi ceux défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine A ?
Il y a 65 composants défectueux et 27 proviennent de l'usine A donc si on prélève un composant au hasard parmi ceux défectueux, la probabilité qu'il provienne de l'usine A est

$$\boxed{p_2 = \frac{27}{65} \approx 0,415}$$

3. Le contrôle est jugé satisfaisant si le pourcentage de composants défectueux est inférieur à 7% dans chaque usine. Ce contrôle est-il satisfaisant ?

- Dans l'usine A, le pourcentage de composants défectueux est de $0,054 = 5,4\%$ d'après la question (**1.**). Ce qui est bien inférieur à 7%, le contrôle est donc jugé satisfaisant dans l'usine A.
- Dans l'usine B.
  Il y a 38 composants défectueux parmi les 500 de l'usine B donc si on prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine B, la probabilité qu'il soit défectueux est :

$$\boxed{p_3 = \frac{38}{500} = 0,076 = 7,6\% > 7\%}$$

  Le contrôle n'est donc pas jugé satisfaisant dans l'usine B.

Exercice 2. Programmes de calculs 4,5 points

1. Vérifiez qu'en choisissant 2 au départ avec le programme A, on obtient 9.

Programme A

Étape 1	Choisir un nombre	2
Étape 2	Multiplier par -2	$2 \times (-2) = -4$
Étape 3	Ajouter 13	$-4 + 13 = 9$

En choisissant 2 au départ avec le programme A, on obtient 9.

2. Quel nombre choisir pour obtenir 9 avec le programme B ?

Pour trouver ce nombre avec le programme B, on peut effectuer les opérations réciproques en partant de la dernière étape :

Programme B

	On a obtenu	9
Étape 3	On divise par 3 (au lieu de multiplier)	$9/3 = 3$
Étape 2	On ajoute 7 (au lieu de soustraire)	$3 + 7 = 10$
Étape 1	Choisir un nombre	10

Pour obtenir 9 avec le programme B il faut choisir le nombre 10.

Vérification :

Programme B

Étape 1	Choisir un nombre	10
Étape 2	Soustraire 7	$10 - 7 = 3$
Étape 3	Multiplier par 3	$3 \times 3 = 9$

3. Peut-on trouver un nombre pour lequel les deux programme donnent le même résultat ?

On part du nombre x.

Programme A

Étape 1	Choisir un nombre	x
Étape 2	Multiplier par -2	$x \times (-2) = -2x$
Étape 3	Ajouter 13	$-2x + 13$

Programme B

Étape 1	Choisir un nombre	x
Étape 2	Soustraire 7	$x - 7$
Étape 3	Multiplier par 3	$(x - 7) \times 3 = 3x - 21$

On cherche alors si il existe un nombre x tel que :

$$\begin{aligned} -2x + 13 = 3x - 21 &\iff 13 + 21 = 3x + 2x \\ &\iff 34 = 5x \\ &\iff x = \frac{34}{5} = 6,8 \end{aligned}$$

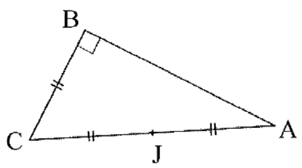
L'unique nombre pour lequel les deux programme donnent le même résultat est :

$$\boxed{x = \frac{34}{5} = 6,8}$$

Exercice 3. Géométrie 5 points

Pour chacune des figures, calculez la longueur AB au millimètre près.

Figure 1



BC = 6 cm.

Figure 2

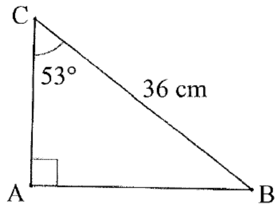
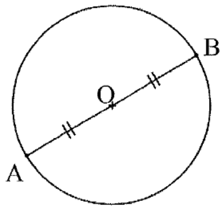


Figure 3



[AB] est un diamètre du cercle de centre O.

La longueur du cercle est 154 cm.

1. Pour la figure 1.

On va supposer que le point J est le milieu du segment [AC], rien n'indique en fait que les points C, J et A soient alignés !

- Méthode 1.
  Dans ce cas on a d'après les données :

$$BC = 6 \text{ cm} = JC = JA \Longrightarrow AC = 2 \times BC = 12 \text{ cm}$$

On peut alors appliquer le théorème de Pythagore.

Dans le triangle BAC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 \\ 12^2 &= BA^2 + 6^2 \\ BA^2 &= 12^2 - 6^2 \\ BA^2 &= 144 - 36 \\ BA^2 &= 108 \end{aligned}$$

Or BA est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned} BA &= \sqrt{108} \\ BA &\approx \underline{10{,}39 \text{ cm}} \end{aligned}$$

Arrondi au millimètre on obtient donc :

$$\boxed{BA \approx 10,4 \text{ cm}}$$

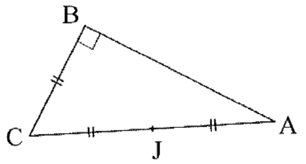
- Méthode 2.
  Le cercle circonscrit à un triangle rectangle est de diamètre l'hypoténuse du triangle. De ce fait le point J est le centre de ce cercle circonscrit et $JB = JC$. On en déduit alors que le triangle BCJ est équilatéral et donc que l'angle $\widehat{BCJ}$ est de mesure 60°.
  Dans le triangle ABC rectangle en B on a alors :

$$\tan \widehat{BJC} = \frac{AB}{BC} \Longleftrightarrow \tan 60° = \frac{AB}{6}$$

On obtient donc arrondi au millimètre :

$$\boxed{AB = 6 \times \tan 60° \approx 10,4 \text{ cm}}$$

Figure 1



BC = 6 cm.

Figure 2

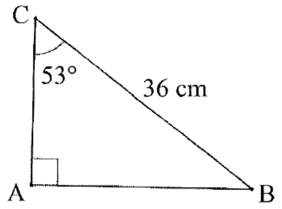
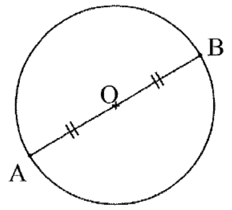


Figure 3



[AB] est un diamètre du cercle de centre O.

La longueur du cercle est 154 cm.

2. Pour la figure 2.

ABC est rectangle en A donc :

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{CB} \Longleftrightarrow \sin 53^\circ = \frac{AB}{36}$$

On obtient donc arrondi au millimètre :

$$\boxed{AB = 36 \times \sin 53^\circ \approx 28,8 \text{ cm}}$$

3. Pour la figure 3.

Le périmètre p d'un cercle de diamètre AB est :

$$p = \pi \times AB$$

Sachant que ce périmètre est égal à 154 cm on a, arrondi au millième :

$$\pi \times AB = 154 \Longleftrightarrow \boxed{AB = \frac{154}{\pi} \approx 49,0 \text{ cm}}$$

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Tableur et pourcentages — 5 points

Lors des soldes, un commerçant décide d'appliquer une réduction de 30% sur l'ensemble des articles de son magasin.

1. L'un des articles coûte 54 euros avant la réduction. Calculer son prix après la réduction.

Effectuer une baisse de 30%, c'est multiplier par $1 - 30\% = 0,7$ car cela revient à ne garder que 70% de la somme initiale. On obtient donc après réduction :

$$\boxed{54 \text{ €} \times 0,7 = \underline{37,80 \text{ €}}}$$

2. Le commerçant utilise la feuille de calcul ci-dessous pour calculer les prix des articles soldés.

	A	B	C	D	E	F
1	prix avant réduction	12,00 €	14,80 €	33,00 €	44,20 €	85,50 €
2	réduction de 30%	3,60 €	4,44 €	9,90 €	13,26 €	25,65 €
3	prix soldé					

2. a. Pour calculer la réduction, quelle formule a-t-il pu saisir dans la cellule B2 avant de l'étirer sur la ligne 2 ?

Pour calculer la réduction, la formule qu'il a pu saisir dans la cellule B2 avant de l'étirer sur la ligne 2 est :

$$\boxed{= B1 * 0,3}$$

2. b. Pour obtenir le prix soldé, quelle formule peut-il saisir dans la cellule B3 avant de l'étirer sur la ligne 3 ?

Pour obtenir le prix soldé, la formule qu'il a pu saisir dans la cellule B3 avant de l'étirer sur la ligne 3 est :

$$\boxed{= B1 - B2} \quad \text{ou} \quad \boxed{= B1 * 0,7}$$

3. Le prix soldé d'un article est 42,00 euros. Quel était son prix initial ?

Effectuer une baisse de 30%, c'est multiplier par $1-30\% = 0,7$, en notant P le prix avant réduction on obtient donc l'équation :

$$P \times 0,7 = 42 \text{ €} \Longleftrightarrow P = \frac{42 \text{ €}}{0,7} = 60 \text{ €}$$

Le prix initial était de <u>60 euros</u>.

Compléments :

Propriété 1

Soit x un nombre strictement positif, $x \in \mathbb{R}_+^* =]0 ; +\infty[$.

1. Augmenter une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 + x\,\%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times (1+x\,\%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div (1+x\,\%)"] \end{tikzcd}$$

2. Diminuer une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 - x\,\%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times (1-x\,\%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div (1-x\,\%)"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. **1.** Augmenter une quantité V de x % c'est lui ajouter x % de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i + v_i \times x\,\%$. Or après factorisation on obtient :

$$v_f = v_i + v_i \times x\,\% = v_i \times \left(1 + x\,\%\right) = v_i \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 + x}{100}$$

2. Diminuer une quantité V de x % c'est lui soustraire x % de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i - v_i \times x\,\%$. Or après factorisation on obtient :

$$v_f = v_i - v_i \times x\,\% = v_i \times \left(1 - x\,\%\right) = v_i \times \left(1 - \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 - x}{100}$$

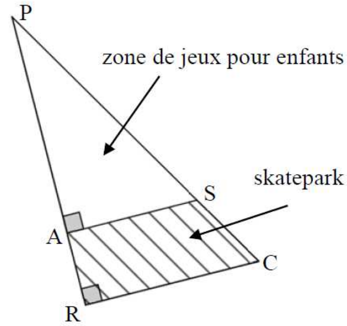
□

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 5. Surface 5,5 points

La figure PRC ci-contre représente un terrain appartenant à une commune. Les points P, A et R sont alignés. Les points P, S et C sont alignés. Il est prévu d'aménager sur ce terrain : une « zone de jeux pour enfants » sur la partie PAS ; un « skatepark » sur la partie RASC. On connaît les dimensions suivantes :

$$PA = 30 \text{ m} ; AR = 10 \text{ m} ; AS = 18 \text{ m}.$$



1. La commune souhaite semer du gazon sur la « zone de jeux pour enfants ». Elle décide d' acheter des sacs de 5 kg de mélange de graines pour gazon à 13,90 euros l'unité. Chaque sac permet de couvrir une surface d'environ 140 m^2. Quel budget doit prévoir cette commune pour pouvoir semer du gazon sur la totalité de la « zone de jeux pour enfants » ?

- La zone pour enfants est le triangle PAS rectangle en A, donc son aire est :

$$\mathcal{A}_{(PAS)} = \frac{AP \times AS}{2} = \frac{30 \times 18}{2} = \underline{270 \text{ m}^2}$$

- Chaque sac permet de couvrir une surface d'environ 140 m^2. Par division euclidienne on obtient :

$$270 = 140 \times 1 + 130$$

Il convient donc d'acheter deux sacs, qui permettent de couvrir environ 280 m^2.

- Les sacs de 5 kg de mélange de graines pour gazon coûtent 13,90 euros l'unité et il en faut deux. Le budget à prévoir par cette commune pour pouvoir semer du gazon sur la totalité de la « zone de jeux pour enfants » est donc de :

$$\boxed{2 \times 13,9 \text{ €} = 27,8 \text{ €}}$$

2. Calculer l'aire du « skatepark ».

L'aire du skatepark peut s'obtenir, soit en effectuant la différence entre l'aire du triangle rectangle PRC avec celle du triangle PAS calculée lors de la question **(1.)**, soit en utilisant la formule de l'aire d'un trapèze. Dans les deux cas, il nous manque RC.

- Calculons RC.
  Les droites (AS) et (RC) sont perpendiculaires à la droite (PR), elles sont donc parallèles entre elles.
  - Données :
    - ❏ Les points P, A, R et P, S, C sont alignés sur deux droites sécantes en P;
    - ❏ Les droites (AS) et (RC) sont parallèles .
  - Donc d'après le *théorème de Thalès* on a :

$$\frac{PA}{PR} = \frac{PS}{PC} = \frac{AS}{RC}$$

Puis en remplaçant par les valeurs

$$\frac{30}{30+10} = \frac{PS}{PC} = \frac{18}{RC}$$

On a donc

$$\frac{30}{40} = \frac{18}{RC} \iff RC = \frac{40 \times 18}{30} = \underline{24 \text{ m}}$$

- Méthode 1.
  On a alors l'aire du triangle rectangle PRC :

$$\mathcal{A}_{(PRC)} = \frac{PR \times PC}{2} = \frac{40 \times 24}{2} = \underline{480 \text{ m}^2}$$

Et donc l'aire du skatepark est :

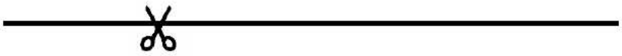
$$\boxed{\mathcal{A}_{(ASCR)} = \mathcal{A}_{(PRC)} - \mathcal{A}_{(PAS)} = 480 - 270 = \underline{210 \text{ m}^2}}$$

- Méthode 2.
  Si on connaissait la formule donnant l'aire d'un trapèze rectangle on obtenait alors directement :

$$\mathcal{A}_{(ASCR)} = \text{hauteur} \times \frac{(\text{petite base + grande})}{2} = AR \times \frac{(AS + RC)}{2} = 10 \times \frac{18 + 24}{2} = \underline{210 \text{ m}^2}$$

Exercice 6. Surface — 7 points

Avec des ficelles de 20 cm, on construit des polygones comme ci-dessous :

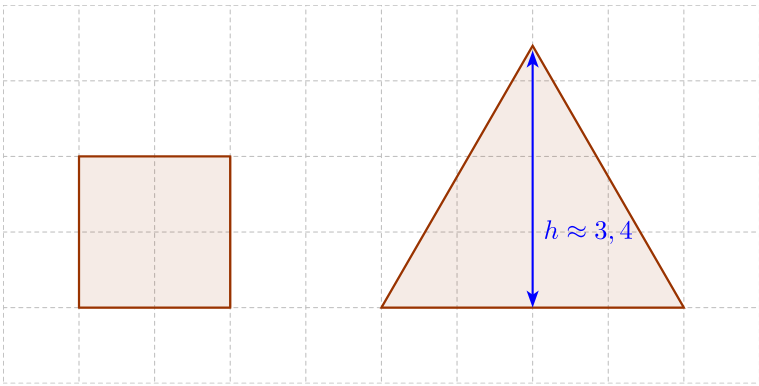
Étape 1		On coupe la ficelle de 20 cm en deux morceaux.
Étape 2	morceau n° 1 — morceau n° 2	On sépare les deux morceaux.
Étape 3		• Avec le « morceau n° 1 », on construit un carré. • Avec le « morceau n° 2 », on construit un triangle équilatéral.

Partie 1

Dans cette partie, on découpe à l'étape 1 une ficelle pour que le « morceau n° 1 » mesure 8 cm.

1. Dessiner en grandeur réelle les deux polygones obtenus.

Le « morceau n° 1 » mesure 8 cm donc le carré formé est de côté $8 \div 4 = 2$ cm.
Le triangle équilatéral est formé avec la ficelle restante soit avec $20 - 8 = 12$ cm. Il sera donc de côté $12 \div 3 = 4$ cm.



2. Calculer l'aire du carré obtenu.

Le « morceau n° 1 » mesure 8 cm donc le carré formé est de côté $8 \div 4 = 2$ cm, et son aire sera donc de :

$$\mathcal{A}_1 = 2^2 = \underline{4 \text{ cm}^2}$$

3. Estimer l'aire du triangle équilatéral obtenu en mesurant sur le dessin.

La hauteur h du triangle équilatéral mesurée est d'environ $3,4$ cm, elle est associée à une base de 4 cm. On peut donc estimer l'aire du triangle équilatéral avec la formule :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur associée}}{2}$$

Et donc :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{4 \times h}{2} \approx \frac{4 \times 3,4}{2} \Longrightarrow \mathcal{A}_2 \approx \underline{6,8 \text{ cm}^2}$$

Compléments : *On peut montrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Donc ici :*

$$\mathcal{A}_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \approx \underline{6,93 \text{ cm}^2}$$

Partie 2

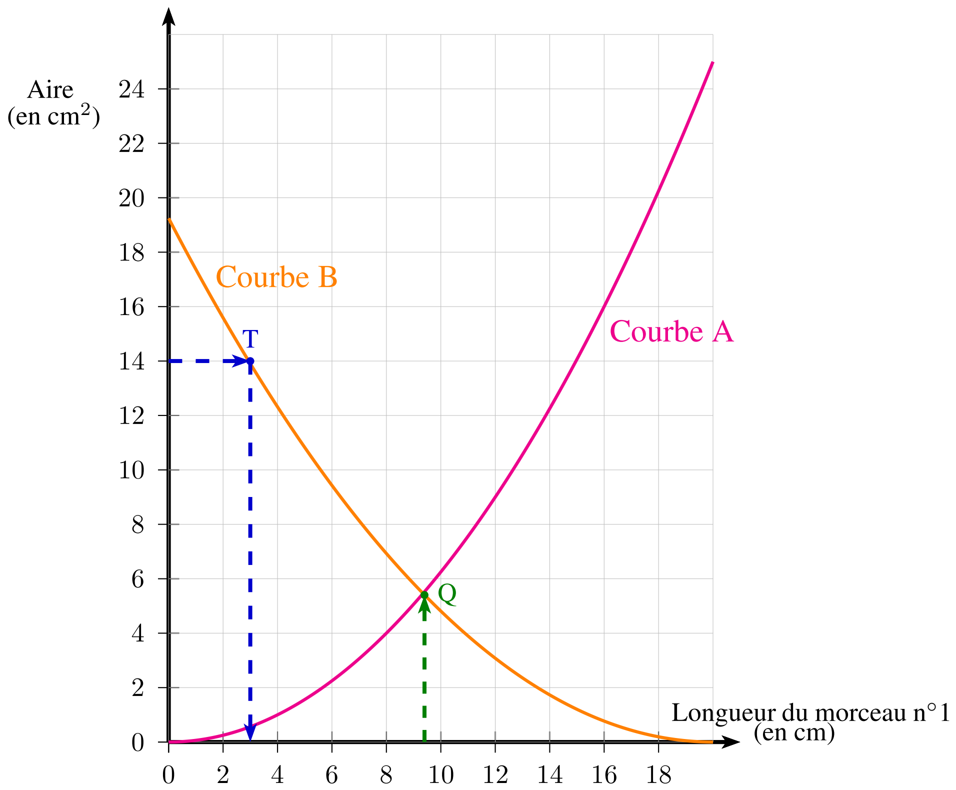
On cherche maintenant à étudier l'aire des deux polygones obtenus à l'étape 3 en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».

1. Proposer une formule qui permet de calculer l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau n°1 ».

En notant L la longueur du « morceau n°1 », le carré est de côté $L \div 4$ et donc son aire est :

$$\boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}}$$

2. La courbe A représente la fonction qui donne l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau n° 1 » ; la courbe B celle qui donne l'aire du triangle équilatéral en fonction de la longueur du « morceau n° 1 ».



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes. Aucune justification n'est attendue.

2. a. Quelle est la longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir un triangle équilatéral d'aire 14 cm² ?

La longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir un triangle équilatéral d'aire 14 cm² est d'environ 3 cm.
Il suffit pour cela de lire l'unique antécédent de 14 par la fonction associée à la courbe B.
En bleu sur le graphique, on lit l'abscisse $x_T \approx 3$ du point T de la courbe B, d'ordonnée 14.

2. b. Quelle est la longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir deux polygones d'aires égales ?

La longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir deux polygones d'aires égales correspond à l'abscisse du point d'intersection Q (en vert) des deux courbes soit $x_Q \approx 9,4$ cm.

Compléments : *On peut montrer que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Donc ici, si le morceau 1 est de longueur L, il reste $(20 - L)$ cm pour former le triangle équilatéral qui est donc de côté $a = \frac{20-L}{3}$ et d'aire :*

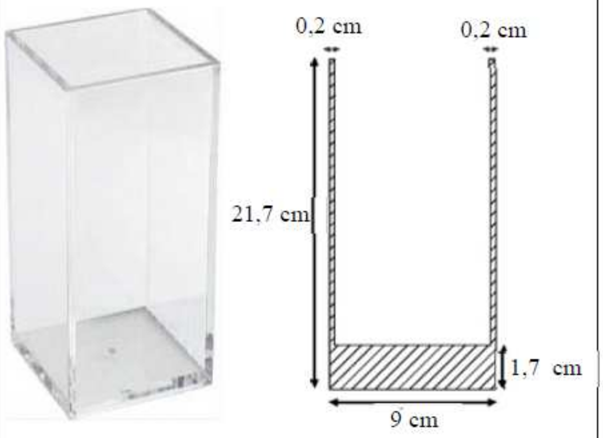
$$\mathcal{A}_B = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{20-L}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}(20-L)^2$$

Les fonctions f_A et f_B associées respectivement aux courbes A et B sont donc définies sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par : $f_A(x) = \frac{x^2}{16}$ et $f_B(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}(20-x)^2$. Les réponses plus précises aux questions **(2.a)** *et* **(2.b)** *peuvent se trouver par le calcul au niveau lycée, on obtient alors $x_T \approx 2,94$ et $x_Q \approx 9,35$.*

Exercice 7. Problème — 5 points

Antoine crée des objets de décoration avec des vases, des billes et de l'eau colorée. Pour sa nouvelle création, il décide d'utiliser le vase et les billes ayant les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques du vase



Matière : verre
Forme : pavé droit
Dimensions extérieures : 9 cm × 9 cm × 21,7 cm
Épaisseur des bords : 0,2 cm
Épaisseur du fond : 1,7 cm

Caractéristiques des billes

Matière : verre
Forme : boule
Dimensions : 1,8 cm de diamètre

Il met 150 billes dans le vase. Peut-il ajouter un litre d'eau colorée sans risquer le débordement ?

- **Volume du Vase**.
  - Le fond du vase mesurant 1,7 cm, sa hauteur est de
  $$h = 21,7 - 1,7 = 20 \text{ cm}$$
  - L'épaisseur est de 0,2 cm donc la base est un carré de côté :
  $$c = 9 - 0,2 \times 2 = 9 - 0,4 = 8,6 \text{ cm}$$
  - Le vase est donc un pavé droit de dimensions $c \times c \times h$ donc son volume est :
  $$\mathcal{V}_1 = 20 \times 8,6 \times 8,6 = \underline{1\,479,2 \text{ cm}^3}$$
- **Volume de la boule**.
  La boule est de diamètre 1,8 cm donc de rayon 0,9 cm. Son volume est alors :
  $$\mathcal{V}_2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0,9^3 \text{ cm}^3$$
  Le volume des 150 billes est donc de :
  $$\mathcal{V}_3 = 150 \times \mathcal{V}_2 = 150 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 0,9^3 = 145,8\pi \approx 458,044 \text{ cm}^3$$
- **Conclusion**.
  Le volume restant dans le vase après y avoir introduit les 150 billes est donc :
  $$\mathcal{V}_4 = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_3 \approx \underline{1\,021,156 \text{ cm}^3 > 1\,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L}}$$
  Il peut donc ajouter 1 L d'eau colorée sans risquer le débordement.

 ©ISSN 2272-5318